3. (IMO Shortlist)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ ដែលចំពោះគ្រប់ $m,n\in\mathbb{N}^*$:

$$f\big(f(n)+f(m)\big)=n+m$$

ចម្លើយ

យើងនឹងបង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ មានន័យថាចំពោះគ្រប់ $m\neq n$ យើងមាន $f(m)\neq f(n)$ ។ សន្មតផ្ទុយថា មាន $m\neq n$ ដែល $f(m)=f(n)$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}&f\big(f(n)+f(m)\big)=n+m\\&f\big(f(n)+f(m)\big)=f\big(f(n)+f(n)\big)=n+n\\&\Longrightarrow n=m\end{aligned}$$

មិនពិត។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 1$ យើងមាន $f\big(f(n)+f(n)\big)=2n$ និង $f\big(f(n+1)+f(n-1)\big)=(n+1)+(n-1)=2n$ ដែរ។ ដោយ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ដូច្នេះ $f(n)+f(n)=f(n+1)+f(n-1)$ ។ យើងទាញបាន

$$f(n+1)-f(n)=f(n)-f(n-1)$$

$n=2: f(3)-f(2)=f(2)-f(1)$

$n=3: f(4)-f(3)=f(3)-f(2)$

…

$n=k-1: f(k)-f(k-1)=f(k-1)-f(k-2)$

បូកសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$f(k)=f(k-1)-f(1)+f(2)$$

$k=2: f(2)=f(1)+[f(2)-f(1)]$

$k=3: f(3)=f(2)+[f(2)-f(1)]$

…

$k=n: f(n)=f(n-1)+[f(2)-f(1)]$

បូកសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$f(n)=f(1)+(n-1)[f(2)-f(1)]=[f(2)-f(1)]n+2f(1)-f(2)=an+b$$

ដែល $a=f(2)-f(1); b=2f(1)-f(2)$ ។

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}&f\big(f(n)+f(n)\big)\equiv 2n\\&\Leftrightarrow\ a[2f(n)]+b\equiv 2n\\&\Leftrightarrow 2a[an+b]+b\equiv 2n\\&\Leftrightarrow 2a^2n+2ab+b\equiv 2n\end{aligned}$$

ដែលពិតចំពោះគ្រប់ n ។ ដូច្នេះ

$$\begin{cases}a^2=1\\2ab+b=0\end{cases}\Longrightarrow a=\pm1, b=0$$

យើងមិនយកករណី $a=-1$ ទេ ព្រោះ $f(n)=-n$ នោះ $f(n)\notin\mathbb{N}^*$ ។ ដូច្នេះ $f(n)=n$ ។