

គេឱ្យអនុគមន៍ f ដោយ $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម

$$\begin{cases} f(1,1) = 2 \\ f(m+1, n) = f(m, n) + m ; \forall m, n \in \mathbb{N} \\ f(m, n+1) = f(m, n) - n \end{cases}$$

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន (a, b) ដែល $f(a, b) = 2013$ ។

(សំនួរសិស្សពូកែរាជធានីភ្នំពេញ ២០១០)

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន

$$\begin{aligned} f(m+1, n) &= f(m, n) + m \\ m \leftarrow 1: f(2, n) &= f(1, n) + 1 \\ m \leftarrow 2: f(3, n) &= f(2, n) + 2 \\ m \leftarrow 3: f(4, n) &= f(3, n) + 3 \\ &\dots \dots \dots \\ m \leftarrow m-1: f(m, n) &= f(m-1, n) + m-1 \\ \Rightarrow f(m, n) &= f(1, n) + [1 + 2 + 3 + \dots + (m-1)] = f(1, n) + \frac{(m-1)m}{2} \end{aligned}$$

យើងមាន

$$\begin{aligned} f(1, n+1) &= f(1, n) - n \\ n \leftarrow 1: f(1, 2) &= f(1, 1) - 1 \\ n \leftarrow 2: f(1, 3) &= f(1, 2) - 2 \\ n \leftarrow 3: f(1, 4) &= f(1, 3) - 3 \\ &\dots \dots \dots \\ n \leftarrow n-1: f(1, n) &= f(1, n-1) - (n-1) \\ \Rightarrow f(1, n) &= f(1, 1) - [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] = 2 - \frac{(n-1)n}{2} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} f(m, n) &= 2 + \frac{(m-1)m}{2} - \frac{(n-1)n}{2} \\ \Rightarrow f(a, b) &= 2 + \frac{(a-1)a}{2} - \frac{(b-1)b}{2}; f(a, b) = 2013 \\ \Rightarrow \frac{(a-1)a}{2} - \frac{(b-1)b}{2} &= 2011 \\ \Leftrightarrow a^2 - a - b^2 + b &= 2(2011) \\ \Leftrightarrow (a-b)(a+b) - (a-b) &= 2(2011) \\ \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) &= 2(2011) \end{aligned}$$

យើងមាន 2011 ជាចំនួនបឋម, $a > b, a + b - 1 > a - b$ ។ តាំង $d = \text{PGCD}(a - b, a + b - 1)$ ដូច្នេះ

$a - b = kd, a + b - 1 = pd$ ដែល k បឋមនឹង p ។ ដូច្នេះ

$$kpd^2 = 2 \times 2011 (*)$$

អង្គខាងស្តាំនៃ (*) គ្មានកត្តាមួយណា ដែលមានស្វ័យគុណធំជាងឬស្មើ 2 ទេ ដូច្នេះ $d = 1$ ។ ដូច្នេះ

$$kp = 2 \times 2011$$

ដែលក្នុងនោះ k បឋមនឹង p ។ យើងមាន $(2)(2011) = (1)(2 \times 2011)$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{cases} k = 1 \\ p = 2 \times 2011 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 2 \\ p = 2011 \end{cases}$$

ករណីទីមួយ យើងទាញបាន $a = b + 1 \Rightarrow 2b = 2 \times 2011 \Rightarrow b = 2011, a = 2012$ ។

ករណីទីមួយ យើងទាញបាន $a = b + 2 \Rightarrow 2b + 1 = 2 \times 2011$ មិនអាច។

ដូច្នេះ $a = 2012; b = 2011$ ។